

## 8.1

- a) Nopanheitossa on kuusi yhtä mahdollista alkeistapausta:  
1, 2, 3, 4, 5 ja 6.

Tapahtumalle ”silmäluku on 5” suotuisia alkeistapauksia on yksi: 5.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{silmäluku } 5) = \frac{1}{6} \approx 0,167$$

Suotuisten alkeistapausten  
lukumäärä jaetaan kaikkien  
alkeistapausten lukumäärällä.

- b) Tapahtumalle ”silmäluku on pienempi kuin 5” suotuisia alkeistapauksia on neljä: 1, 2, 3 ja 4.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{silmäluku pienempi kuin } 5) = \frac{4}{6} \approx 0,667$$

- c) Tapahtumalle ”silmäluku on eri suuri kuin 2” suotuisia alkeistapauksia on viisi: 1, 3, 4, 5 ja 6.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{silmäluku eri suuri kuin } 2) = \frac{5}{6} \approx 0,833$$

- d) Tapahtumalle ”jaollinen luvulla 3” suotuisia alkeistapauksia on kaksi: 3 ja 6.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{jaollinen luvulla 3}) = \frac{2}{6} \approx 0,333$$

- e) Tapahtumalle ”pienempi kuin 7” suotuisia alkeistapauksia on kuusi: 1, 2, 3, 4, 5 ja 6.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{silmäluku eri suuri kuin 5}) = \frac{6}{6} = 1$$

Kyseessä on varma tapahtuma, eli kaikki alkeistapaukset ovat suotuisia. Varman tapahtuman todennäköisyys on 1.

- f) Tapahtumalle ”vähintään 7” suotuisia alkeistapauksia ei ole yhtään. Kyseessä on siis mahdoton tapahtuma eli todennäköisyys on 0.

### Vastaus

a)  $\frac{1}{6} \approx 0,167$

b)  $\frac{4}{6} \approx 0,667$

c)  $\frac{5}{6} \approx 0,833$

d)  $\frac{2}{6} \approx 0,333$

e) 1

f) 0

## 8.2

- a) Laatikossa on yhteensä 24 palloa eli alkeistapauksia on 24. Näistä punaisia, eli suotuisia alkeistapauksia, on  $24 - 8 - 10 = 6$ .

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{pallo on punainen}) = \frac{6}{24} = 0,25$$

- b) Valkoisia palloja on 8 ja keltaisia 10. Suotuisia alkeistapauksia on siis  $8 + 10 = 18$ .

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{pallo on valkoinen tai keltainen}) = \frac{18}{24} = 0,75$$

### Vastaus

a)  $\frac{6}{24} = 0,25$

b)  $\frac{18}{24} = 0,75$

## 8.3

- a) Havainnollistetaan heittotuloksia taulukon avulla. Lasketaan taulukkoon silmälukujen summat.

	4	5	6	7	8	9	10
Nelisivuisen nopan tulos	3	4	5	6	7	8	9
	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	3	4	5	6	7
		1	2	3	4	5	6
		Kuusisivuisen nopan tulos					

Taulukon voi tehdä esimerkiksi LibreOfficen Calc -ohjelmalla.

Mahdollisia alkeistapauksia (erilaisia heittotuloksia) on kaikkiaan  $6 \cdot 4 = 24$ , ja jokainen niistä on yhtä todennäköinen.

Tapahtumalle ”silmälukujen summa on 7” suotuisia alkeistapauksia on 4.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{silmälukujen summa on } 7) = \frac{4}{24} = 0,167$$

- b) Havainnollistetaan heittotuloksia taulukon avulla. Merkitään taulukkoon tapaukset, joissa nelisivuisen nopan silmäluku on suurempi kuin kuusisivuisen nopan silmäluku.

	4	x	x	x			
Nelisivuisen nopan tulos	3	x	x				
	2	x					
	1						
		1	2	3	4	5	6
		Kuusisivuisen nopan tulos					

Tapahtumalle A: ”nelisivuisen nopan silmäluku on suurempi kuin kuusisivuisen nopan silmäluku” suotuisia alkeistapauksia on 6.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(A) = \frac{6}{24} = 0,25$$

### Vastaus

a)  $\frac{4}{24} = 0,167$

b)  $\frac{6}{24} = 0,25$

## 8.4

- a) Havainnollistetaan heittotuloksia taulukon avulla. Lasketaan taulukkoon silmälukujen summat.

	6	7	8	9	10	11	12
	5	6	7	8	9	10	11
Ensimmäisen nopan tulos	4	5	6	7	8	9	10
	3	4	5	6	7	8	9
	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	3	4	5	6	7
		1	2	3	4	5	6
		Toisen nopan tulos					

Mahdollisia alkeistapauksia (erilaisia heittotuloksia) on kaikkiaan  $6 \cdot 6 = 36$ , ja jokainen niistä on yhtä todennäköinen.

Tapahtumalle ”silmälukujen summa on 8” suotuisia alkeistapauksia on 5.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{silmälukujen summa on } 8) = \frac{5}{36} = 0,139$$

- b) Havainnollistetaan heittotuloksia taulukon avulla. Merkitään taulukkoon tapaukset, joissa kumpikin silmäluku on vähintään 5 (eli silmäluku on 5 tai 6).

	6					x	x
	5					x	x
Ensimmäisen nopan tulos	4						
	3						
	2						
	1						
		1	2	3	4	5	6
		Toisen nopan tulos					

Tapahtumalle ”kumpikin silmäluku on vähintään 5” suotuisia alkeistapauksia on 4.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{kumpikin silmäluku vähintään } 5) = \frac{4}{36} \approx 0,111$$

- c) Havainnollistetaan heittotuloksia taulukon avulla. Merkitään taulukkoon tapaukset, joissa ainakin toinen silmäluvuista on pienempi kuin 3 (eli ainakin toisen nopan silmäluku on 1 tai 2).

	6	x	x				
	5	x	x				
Ensimmäisen nopan tulos	4	x	x				
	3	x	x				
	2	x	x	x	x	x	x
	1	x	x	x	x	x	x
		1	2	3	4	5	6
		Toisen nopan tulos					

Tapahtumalle A: ”ainakin toinen silmäluvusta on pienempi kuin 3” suotuisia alkeistapauksia on 20.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(A) = \frac{20}{36} \approx 0,556$$

### Vastaus

a)  $\frac{5}{36} = 0,139$

b)  $\frac{4}{36} \approx 0,111$

c)  $\frac{20}{36} \approx 0,556$



## 8.5

Todennäköisyyteen ei vaikuta, heitetäänkö kolikot yhtä aikaa vaiko yksitellen peräkkäin. Ajatellaan, että kolikot heitetään yksitellen peräkkäin. Kirjataan kaikki mahdolliset heittosarjat, jotka voidaan saada. Merkitään  $L = kLaava$  ja  $R = kRuuna$ .

kolme kruunaa:	RRR
kaksi kruunaa:	RRL, RLR, LRR
yksi kruuna:	RLL, LRL, LLR
ei yhtään kruunaa:	LLL

Mahdollisia alkeistapauksia (heittosarjoja) on 8, ja jokainen niistä on yhtä todennäköinen.

a) Tapahtumalle ”tasan yksi kruuna” suotuisia heittosarjoja on 3.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{tasan yksi kruuna}) = \frac{3}{8} = 0,375$$

b) Tapahtuma ”ainakin yksi kruuna” toteutuu, kun kruunia saadaan yksi, kaksi tai kolme. Suotuisia heittosarjoja on 7.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{tasan yksi kruuna}) = \frac{7}{8} = 0,875$$

### Vastaus

a)  $\frac{3}{8} = 0,375$

b)  $\frac{7}{8} = 0,875$

## 8.6

Todennäköisyyteen ei vaikuta, heitetäänkö kolikot yhtä aikaa vaiko yksitellen peräkkäin. Ajatellaan, että kolikot heitetään yksitellen peräkkäin. Kirjataan kaikki mahdolliset heittosarjat, jotka voidaan saada. Merkitään  $L = kLaava$  ja  $R = kRuuna$ .

kaksi kruunaa:	RR
kruuna ja klaava:	RL, LR
kaksi klaavaa:	LL

Mahdollisia alkeistapauksia (heittosarjoja) on 4, ja jokainen niistä on yhtä todennäköinen.

Tapahtumalle ”kruuna ja klaava” suotuisia heittosarjoja on 2.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{kruuna ja klaava}) = \frac{2}{4} = 0,5$$

**Vastaus**

$$\frac{2}{4} = 0,5$$

## 8.7

Tavallisessa korttipakassa on 52 korttia, joten mahdollisia alkeistapauksia on 52, ja jokainen niistä on yhtä todennäköinen.

- a) Korttipakassa on neljä ässää (pataässä, ristiässä, ruutuässä ja herttaässä) eli suotuisia tapauksia on neljä.

Lasketaan tapahtuman ”kortti on ässä” todennäköisyys.

$$P(\text{kortti on ässä}) = \frac{4}{52} \approx 0,077$$

Oikea vastausvaihtoehto on 3.

- b) Korttipakassa on muita kuin ässiä  $52 - 4 = 48$  korttia.

Lasketaan tapahtuman ”kortti ei ole ässä” todennäköisyys.

$$P(\text{kortti ei ole ässä}) = \frac{48}{52} \approx 0,923$$

Oikea vastausvaihtoehto on 6.

- c) Korttipakassa on 13 pataa ja kolme muuta ässää (ristiässä, ruutuässä ja herttaässä). Suotuisia tapauksia on siis  $13 + 3 = 16$ .

Pataässä ei voida laskea mukaan kahta kertaa, joten se on huomioitu ainoastaan patojen lukumäärässä.

Lasketaan tapahtuman ”kortti on pata tai ässä” todennäköisyys.

$$P(\text{kortti on pata tai ässä}) = \frac{16}{52} \approx 0,308$$

Oikea vastausvaihtoehto on 1.

- d) Korttien, jotka eivät ole patoja eivätkä ässiä, lukumäärä saadaan selville, kun korttien kokonaismäärästä vähennetään patojen ja ässien lukumäärä. Suotuisia tapauksia on siis  $52 - 16 = 36$ .

Tässä kannattaa hyödyntää edellisen kohdan (c-kohta) suotuisten tapausten lukumäärää.

Lasketaan tapahtuman ”kortti ei ole pata tai ässä” todennäköisyys.

$$P(\text{kortti ei ole pata tai ässä}) = \frac{36}{52} \approx 0,692$$

Oikea vastausvaihtoehto on 5.

- e) Korttipakassa on yksi pataässä eli suotuisia tapauksia on yksi.

Lasketaan tapahtuman ”kortti on pataässä” todennäköisyys.

$$P(\text{kortti on pataässä}) = \frac{1}{52} \approx 0,019$$

Oikea vastausvaihtoehto on 4.

### Vastaus

- a) 3
- b) 6
- c) 1
- d) 5
- e) 4

## 8.8

- a) Nimetään seurueen kaksi muuta jäsentä Jannaksi ja Kimiksi.

Mahdolliset parit ovat:

Hannu ja Iines

Hannu ja Janna

Hannu ja Kimi

Iines ja Janna

Iines ja Kimi

Janna ja Kimi

Kaikki parit ovat yhtä todennäköisiä.

- b) Tapahtumalle ”Hannu pääsee ravintolaan” suotuisia pareja on 3.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{Hannu pääsee}) = \frac{3}{6} = 0,5$$

- c) Tapahtumalle ”Hannu pääsee ravintolaan, mutta Iines ei” suotuisia pareja on 2.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{Hannu pääsee, Iines ei}) = \frac{2}{6} \approx 0,333$$

- d) Tapahtumalle ”Hannu ja Iines pääsevät ravintolaan” suotuisia pareja on 1 .

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{Hannu ja Iines pääsevät}) = \frac{1}{6} \approx 0,167$$

### Vastaus

- a) Jos jäsenet ovat H, I, J ja K, niin parit ovat HI, HJ, HK, IJ, IK ja JK.

Kaikki parit ovat yhtä todennäköisiä.

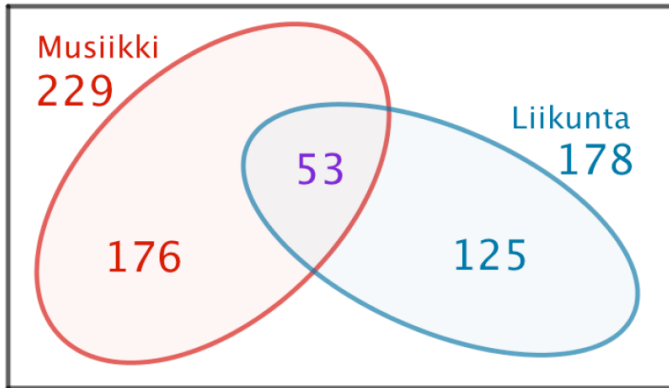
b)  $\frac{3}{6} = 0,5$

c)  $\frac{2}{6} \approx 0,333$

d)  $\frac{1}{6} \approx 0,167$

## 8.9

### Lukion opiskelijoita 793



- a) Lukiossa on 793 opiskelijaa. Opiskelijoista 53 harrastaa sekä liikuntaa että musiikkia.

Lasketaan tapahtuman ”harrastaa liikuntaa ja musiikkia” todennäköisyys.

$$P(\text{harrastaa liikuntaa ja musiikkia}) = \frac{53}{793} \approx 0,0668$$

- b) Liikuntaa harrastaa 178 opiskelijaa ja musiikkia harrastaa 229 opiskelijaa. Molempia harrastaa 53 opiskelijaa.

Lasketaan, kuinka moni harrastaa vain liikuntaa.

$$178 - 53 = 125$$

Lasketaan, kuinka moni harrastaa vain musiikkia.

$$229 - 53 = 176$$

Lasketaan lopuksi, kuinka moni harrastaa joko liikuntaa, musiikkia tai molempia.

$$125 + 176 + 53 = 354$$

Opiskelijoita, jotka harrastavat sekä liikuntaa että musiikkia, ei voi laskea kahteen kertaan (sekä liikunnan harrastajiin että musiikin harrastajiin).

Lasketaan tapahtuman ”harrastaa liikuntaa tai musiikkia” todennäköisyys.

$$P(\text{harrastaa liikuntaa tai musiikkia}) = \frac{354}{793} \approx 0,446$$

c) Ainoastaan musiikkia harrastaa 176 opiskelijaa.

Lasketaan tapahtuman ”harrastaa musiikkia, mutta ei liikuntaa” todennäköisyys.

$$P(\text{harrastaa musiikkia, mutta ei liikuntaa}) = \frac{176}{793} \approx 0,222$$

### Vastaus

a)  $\frac{53}{793} \approx 0,0668$

b)  $\frac{354}{793} \approx 0,446$

c)  $\frac{176}{793} \approx 0,222$

## 8.10

- a) Mahdollisia tapauksia on kaikkiaan 37.  
Suotuisia tapauksia eli punaisia numeroita on 18.

Lasketaan tapahtuman ”punainen numero” todennäköisyys.

$$P(\text{punainen numero}) = \frac{18}{37} \approx 0,486$$

- b) Suotuisia tapauksia eli parillisia numeroita on 18.

Lasketaan tapahtuman ”pariton numero” todennäköisyys.

$$P(\text{pariton numero}) = \frac{18}{37} \approx 0,486$$

- c) Oikeanpuoleisessa sarakkeessa on 12 numeroa, joten suotuisia tapauksia on 12.

Lasketaan tapahtuman ”pariton numero” todennäköisyys.

$$P(\text{numero oikeassa sarakkeessa}) = \frac{12}{37} \approx 0,324$$

- d) Suotuisia tapauksia on 4.

Lasketaan tapahtuman ”numero on 5, 6, 8 tai 9” todennäköisyys.

$$P(\text{numero on 5, 6, 8 tai 9}) = \frac{4}{37} \approx 0,108$$

### Vastaus

- a)  $\frac{18}{37} \approx 0,486$   
b)  $\frac{18}{37} \approx 0,486$   
c)  $\frac{12}{37} \approx 0,324$   
d)  $\frac{4}{37} \approx 0,108$



## 8.11

- a) Nopanheitossa on kuusi yhtä mahdollista alkeistapausta:  
1, 2, 3, 4, 5 ja 6.

Liisa heittää suuremman silmäluvun kuin Anna, jos Liisa heittää silmäluvun 4, 5 tai 6. Suotuisia alkeistapauksia on siis kolme.

Lasketaan tapahtuman ”suurempi silmäluku” todennäköisyys.

$$P(\text{suurempi silmäluku}) = \frac{3}{6} = 0,5$$

- b) Liisa heittää vähintään yhtä suuren silmäluvun kuin Anna, jos Liisa heittää silmäluvun 3, 4, 5 tai 6. Suotuisia alkeistapauksia on siis neljä.

Lasketaan tapahtuman ”vähintään yhtä suuri silmäluku” todennäköisyys.

$$P(\text{vähintään yhtä suuri silmäluku}) = \frac{4}{6} \approx 0,667$$

- c) Liisa heittää pienemmän silmäluvun kuin Anna, jos Liisa heittää silmäluvun 1 tai 2. Suotuisia alkeistapauksia on siis kaksi.

Lasketaan tapahtuman ”pienempi silmäluku” todennäköisyys.

$$P(\text{pienempi silmäluku}) = \frac{2}{6} \approx 0,333$$

### Vastaus

- a)  $\frac{3}{6} = 0,5$    b)  $\frac{4}{6} \approx 0,667$    c)  $\frac{2}{6} \approx 0,333$

## 8.12

- a) Havainnollistetaan heittotuloksia taulukon avulla. Lasketaan taulukkoon silmälukujen summat.

	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Kuusisivuisen nopan tulos	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1	2	3	4	5	6	7	8
				Kahdeksansivuisen nopan tulos					

Mahdollisia alkeistapauksia (erilaisia heittotuloksia) on kaikkiaan  $6 \cdot 8 = 48$ , ja jokainen niistä on yhtä todennäköinen.

Tapahtumalle ”silmälukujen summa on 9” suotuisia alkeistapauksia on 6.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{silmälukujen summa on } 9) = \frac{6}{48} = 0,125$$

- b) Havainnollistetaan heittotuloksia taulukon avulla. Merkitään taulukkoon tapaukset, joissa ainakin toisen nopan silmäluku on vähintään 6.

	<b>6</b>	x	x	x	x	x	x	x	x
	<b>5</b>						x	x	x
Kuusisivuisen nopan tulos	<b>4</b>						x	x	x
	<b>3</b>						x	x	x
	<b>2</b>						x	x	x
	<b>1</b>						x	x	x
		<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
		Kahdeksansivuisen nopan tulos							

Tapahtumalle  $A$ : ”ainakin toisen nopan silmäluku on vähintään 6” suotuisia alkeistapauksia on 23.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(A) = \frac{23}{48} \approx 0,479$$

- c) Havainnollistetaan heittotuloksia taulukon avulla. Merkitään taulukkoon tapaukset, joissa kuusisivuisen nopan silmäluku on suurempi kuin kahdeksansivuisen nopan.

	<b>6</b>	x	x	x	x	x			
	<b>5</b>	x	x	x	x				
Kuusisivuisen nopan tulos	<b>4</b>	x	x	x					
	<b>3</b>	x	x						
	<b>2</b>	x							
	<b>1</b>								
		<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
		Kahdeksansivuisen nopan tulos							

Tapahtumalle  $B$ : ”kuusisivuisen nopan silmäluku on suurempi kuin kahdeksansivuisen nopan silmäluku” suotuisia alkeistapauksia on 15.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(B) = \frac{15}{48} \approx 0,313$$

### Vastaus

a)  $\frac{6}{48} = 0,125$    b)  $\frac{23}{48} \approx 0,479$    c)  $\frac{15}{48} \approx 0,313$

## 8.13

Merkitään Elinaa kirjaimella E, Oskaria kirjaimella O sekä kahta muuta matkailijaa kirjaimilla X ja Y. Mahdolliset lentokoneeseen pääsevät parit ovat:

E O                      E X                      E Y

O X                      O Y

X Y

Alkeistapauksia on 6 kappaletta ja kaikki alkeistapaukset ovat yhtä todennäköisiä.

- a) Tapahtumalle ”Elina ja Oskari pääsevät koneeseen” suotuisia pareja on 1.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{Elina ja Oskari koneeseen}) = \frac{1}{6} \approx 0,167$$

- b) Tapahtumalle ”Elina pääsee koneeseen” suotuisia pareja on 3.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{Elina koneeseen}) = \frac{3}{6} = 0,5$$

### Vastaus

a)  $\frac{1}{6} \approx 0,167$

b)  $\frac{3}{6} = 0,5$

## 8.14

Nelisivuisen nopan silmäluvut ovat 1, 2, 3 ja 4. Taulukoidaan mahdolliset luvut.

	<b>4</b>	41	42	43	44
Ensimmäisen nopan tulos	<b>3</b>	31	32	33	34
	<b>2</b>	21	22	23	24
	<b>1</b>	11	12	13	14
		<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
		Toisen nopan tulos			

Alkeistapauksia on yhteensä  $4 \cdot 4 = 16$ .

- a) Tapahtumalle ”luku on 13” suotuisia alkeistapauksia on yksi.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{luku on 13}) = \frac{1}{16} = 0,0625$$

- b) Tapahtumalle ”luku on suurempi kuin 21” suotuisia alkeistapauksia on yksitoista.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{luku on suurempi kuin 21}) = \frac{11}{16} \approx 0,688$$

- c) Tapahtumalle "luku on korkeintaan 19" suotuisia alkeistapauksia on neljä.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{luku on korkeintaan 19}) = \frac{4}{16} = 0,25$$

- d) Kaikki taulukon luvut ovat pienempiä kuin 63. Tapahtumalle "luku on pienempi kuin 63" suotuisia alkeistapauksia on siis kuusitoista.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{pienempi kuin 63}) = \frac{16}{16} = 1$$

### Vastaus

- a)  $\frac{1}{16} = 0,0625$   
b)  $\frac{11}{16} \approx 0,688$   
c)  $\frac{4}{16} = 0,25$   
d)  $\frac{16}{16} = 1$

## 8.15

Todennäköisyyteen ei vaikuta, heitetäänkö kolikot yhtä aikaa vaiko yksitellen peräkkäin. Ajatellaan, että kolikot heitetään yksitellen peräkkäin. Kirjataan kaikki mahdolliset heittosarjat, jotka voidaan saada. Merkitään  $L = kLaava$  ja  $R = kRuuna$ .

neljä klaavaa:	LLLL
kolme klaavaa:	LLLR, LLRL, LRLL, RLLL
kaksi klaavaa:	LLRR, LRLR, LRRL, RLLR, RLRL, RRLR
yksi klaava:	LRRR, RLRR, RRLR, RRRR
ei yhtään klaavaa:	RRRR

Mahdollisia alkeistapauksia (heittosarjoja) on 16, ja jokainen niistä on yhtä todennäköinen.

a) Tapahtumalle ”täsmälleen kaksi klaavaa” suotuisia heittosarjoja on 6.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{täsmälleen kaksi klaavaa}) = \frac{6}{16} = 0,375$$

b) Tapahtuma ”vähemmän kuin kaksi klaavaa” toteutuu, kun klaavoja saadaan yksi tai ei yhtään. Suotuisia heittosarjoja on 5.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{vähemmän kuin kaksi klaavaa}) = \frac{5}{16} \approx 0,313$$

### Vastaus

a)  $\frac{3}{8} = 0,375$

b)  $\frac{5}{16} \approx 0,313$



## 8.16

Kolikonheitossa voidaan saada joko kruuna tai klaava. Molemmat ovat yhtä todennäköisiä. Lasketaan todennäköisyys, että heitolla saadaan kruuna.

$$P(\text{kruuna}) = \frac{1}{2} = 0,5$$

Viikonpäiviä on seitsemän ja lapsen syntymä osuu yhtä todennäköisesti kullekin päivistä. Lasketaan todennäköisyys, että lapsi syntyy sunnuntaina.

$$P(\text{lapsi on syntynyt sunnuntaina}) = \frac{1}{7} \approx 0,143$$

Todennäköisyyksien perusteella voi kuitenkin tehdä ainoastaan tilastollisia johtopäätöksiä. Yksittäisessä tapauksessa voi tapahtua mikä tahansa vaihtoehtoista.

Vaihtoehtoista ainoastaan

c) ”Kun kolikkoa heitetään satoja kertoja, noin 50 % tuloksista on kruunia.” ja

f) ”Tällä hetkellä elävistä maapallon ihmisistä noin 14 % on syntynyt sunnuntaina.” ovat tosia.

Muissa vaihtoehtoissa on kyse yksittäisistä tapauksista.

### Vastaus

c ja f

## 8.17

- a) Taskussa on yhteensä  $3 + 5 + 2 + 1 + 7 + 1 = 19$  esinettä.  
Näistä kolikoita, eli suotuisia alkeistapauksia, on  $3 + 5 + 2 + 1 = 11$ .

Lasketaan tapahtuman ”esine on kolikko” todennäköisyys.

$$P(\text{esine on kolikko}) = \frac{11}{19} \approx 0,579$$

- b) Esine riittää maksuksi mutterista, jos kyseessä on 50 sentin kolikko tai euron kolikko. Suotuisia alkeistapauksia on siis  $2 + 1 = 3$ .

Lasketaan tapahtuman ”esine riittää maksuksi” todennäköisyys.

$$P(\text{esine riittää maksuksi}) = \frac{3}{19} \approx 0,158$$

- c) Kolikkoja on taskussa 11, joten kaikkien alkeistapausten lukumäärä on 11. Näistä 3 on riittävän arvokkaita mutterin maksamiseen, joten suotuisia alkeistapauksia on 3.

Lasketaan tapahtuman A: ”esine riittää maksuun, kun se on kolikko” todennäköisyys.

$$P(A) = \frac{3}{11} \approx 0,273$$

### Vastaus

- a)  $\frac{11}{19} \approx 0,579$   
b)  $\frac{3}{19} \approx 0,158$   
c)  $\frac{3}{11} \approx 0,273$

## 8.18

- a) Kun korttipakasta on nostettu yksi kortti, on jäljellä 51 korttia. Alkeistapauksia on siis 51.

Koska nostettu kortti on pata, korttipakassa on jäljellä  $13 - 1 = 12$  pataa. Suotuisia alkeistapauksia on siis 12.

Lasketaan tapahtuman ”toinen kortti on pata” todennäköisyys.

$$P(\text{pata}) = \frac{12}{51} \approx 0,235$$

- b) Koska pakasta on jo nostettu pataässä, ei sitä voi nostaa enää uudestaan. Tapahtuma ”toinen kortti ei ole pataässä” on siis varma tapahtuma, joten sen todennäköisyys on 1.

- c) Koska nostettu kortti on pataässä, korttipakassa on jäljellä patoja  $13 - 1 = 12$  ja ässiä  $4 - 1 = 3$ . Suotuisia tapauksia on  $12 + 3 = 15$ .

Lasketaan tapahtuman ”toinen kortti on pata tai ässä” todennäköisyys.

$$P(\text{pata tai ässä}) = \frac{15}{51} \approx 0,294$$

- d) Vähennetään jäljellä olevasta korttien lukumäärästä patojen ja ässien lukumäärä, niin saadaan selville, kuinka moni korteista ei ole pata eikä ässä.

$$51 - 12 - 3 = 36$$

Lasketaan tapahtuman ”toinen kortti ei ole pata eikä ässä” todennäköisyys.

$$P(\text{ei pata eikä ässä}) = \frac{36}{51} \approx 0,706$$

- e) Koska nostettu kortti on pataässä, korttipakassa on jäljellä 13 herttaa, joista yksi on ässä. Lisäksi korttipakassa on jäljellä 2 muuta ässää (ristiässä ja ruutuässä).

Suotuisia tapauksia on  $13 + 2 = 15$ .

Lasketaan tapahtuman ”toinen kortti on hertta tai ässä” todennäköisyys.

$$P(\text{hertta tai ässä}) = \frac{15}{51} \approx 0,294$$

- f) Koska nostettu kortti on pataässä, korttipakassa on jäljellä 4 kuningasta. Suotuisia tapauksia on siis 4.

Lasketaan tapahtuman ”toinen kortti on kuningas” todennäköisyys.

$$P(\text{hertta tai ässä}) = \frac{4}{51} \approx 0,0784$$

### Vastaus

a)  $\frac{12}{51} \approx 0,235$

b) 1

c)  $\frac{15}{51} \approx 0,294$

d)  $\frac{36}{51} \approx 0,706$

e)  $\frac{15}{51} \approx 0,294$

f)  $\frac{4}{51} \approx 0,0784$

## 8.19

- a) Kun korttipakasta on nostettu kolme korttia, on jäljellä 49 korttia.

Koska nostetut kortit ovat samaa maata, korttipakassa on kyseistä maata jäljellä  $13 - 3 = 10$  korttia.

Lasketaan tapahtuman ”neljäs kortti on samaa maata” todennäköisyys.

$$P(\text{samaa maata}) = \frac{10}{49} \approx 0,204$$

Koska kolme ensimmäistä jaettua korttia ovat samaa maata, ovat ne keskenään eri arvoisia.

Korttipakassa on alun perin neljä samanarvoista korttia. Samanarvoisia kortteja kuin ensimmäisenä Lauralle jaettu kortti, on pakassa jäljellä  $4 - 1 = 3$ . Myös toisena jaetun kortin kanssa samanarvoisia on jäljellä 3 ja kolmantena jaetun kortin kanssa samanarvoisia on jäljellä 3. Suotuisia alkeistapauksia on siis  $3 + 3 + 3 = 9$ .

Lasketaan tapahtuman ”neljäs kortti on samanarvoinen” todennäköisyys.

$$P(\text{samanarvoinen}) = \frac{9}{49} \approx 0,184$$

On siis todennäköisempää nostaa samaa maata oleva kortti.

- b) Kun korttipakasta on nostettu neljä korttia, on jäljellä 48 korttia.

Koska nostetut kortit ovat samaa maata, korttipakassa on kyseistä maata jäljellä  $13 - 4 = 9$  korttia.

Lasketaan tapahtuman ”viides kortti on samaa maata” todennäköisyys.

$$P(\text{samaa maata}) = \frac{9}{48} \approx 0,188$$

Nostettuja kortteja on neljä, ja ne ovat keskenään eri arvoisia. Siten pakassa on vielä samanarvoisia kortteja eli suotuisia alkeistapauksia  $3 + 3 + 3 + 3 = 12$ .

Lasketaan tapahtuman ”neljäs kortti on samanarvoinen” todennäköisyys.

$$P(\text{samanarvoinen}) = \frac{12}{48} = 0,25$$

On siis todennäköisempää nostaa kortti, joka on samanarvoinen kuin jokin jo kädessä oleva kortti.

### **Vastaus**

- a)** samaa maata
- b)** samanarvoinen

## 8.20

a) Luku  $x = 1$  toteuttaa yhtälön  $ax + b = 3$ ,

jos  $a \cdot 1 + b = 3$  eli  $a + b = 3$ .

Taulukoidaan kaikki mahdolliset alkeistapaukset ja merkitään taulukkoon alkeistapaukset, joissa  $a + b = 3$ .

	6						
	5						
a	4						
	3						
	2	x					
	1		x				
		1	2	3	4	5	6
		b					

Mahdollisia alkeistapauksia (erilaisia heittotuloksia) on kaikkiaan  $6 \cdot 6 = 36$ , ja jokainen niistä on yhtä todennäköinen.

Suotuisia alkeistapauksia on 2.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{luku } x = 1 \text{ toteuttaa yhtälön}) = \frac{2}{36} \approx 0,0556$$

b) Luku  $x = -1$  toteuttaa yhtälön  $ax + b = 3$ ,

jos  $a \cdot (-1) + b = 3$  eli  $-a + b = 3$  eli  $b - a = 3$ .

Taulukoidaan kaikki mahdolliset alkeistapaukset ja merkitään taulukkoon alkeistapaukset, joissa  $b - a = 3$ .

	6						
	5						
a	4						
	3						x
	2					x	
	1				x		
		1	2	3	4	5	6
		b					

Suotuisia alkeistapauksia on 3.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{luku } x = -1 \text{ toteuttaa yhtälön}) = \frac{3}{36} \approx 0,0833$$

**Vastaus**

a)  $\frac{2}{36} \approx 0,0556$    b)  $\frac{3}{36} \approx 0,0833$



## 8.21

a) Funktion nollakohta on  $x = -1$ , jos  $f(-1) = 0$ .

$$f(-1) = 0$$

$$(-1)^2 + p \cdot (-1) + q = 0$$

$$1 - p + q = 0$$

$$q = p - 1$$

Taulukoidaan alkeistapaukset ja merkitään taulukkoon alkeistapaukset, joissa  $q = p - 1$ .

	6						
	5						x
q	4					x	
	3				x		
	2			x			
	1		x				
		1	2	3	4	5	6
		p					

Mahdollisia alkeistapauksia (erilaisia heittotuloksia) on kaikkiaan  $6 \cdot 6 = 36$ , ja jokainen niistä on yhtä todennäköinen.

Suotuisia alkeistapauksia on 5.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{funktion nollakohta on } x = -1) = \frac{5}{36} \approx 0,139$$

b) Tutkitaan, milloin funktiolle pätee  $f(-1) = f(-2)$ .

$$f(-1) = f(-2)$$

$$(-1)^2 + p \cdot (-1) + q = (-2)^2 + p \cdot (-2) + q$$

$$1 - p + q = 4 - 2p + q + 4$$

$$2p - p + q - q = 4 - 1$$

$$p = 3$$

Taulukoidaan kaikki mahdolliset alkeistapaukset ja merkitään suotuisat alkeistapaukset taulukkoon.

	<b>6</b>			x			
	<b>5</b>			x			
<i>q</i>	<b>4</b>			x			
	<b>3</b>			x			
	<b>2</b>			x			
	<b>1</b>			x			
		<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
		<i>p</i>					

Suotuisia alkeistapauksia on 6.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(A) = \frac{6}{36} \approx 0,167$$

**Vastaus**

**a)**  $\frac{5}{36} \approx 0,139$     **b)**  $\frac{6}{36} \approx 0,167$